И. В. Лубягина

Вятский государственный университет,

lubyagina@yandex.ru

О ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУКОЛЬЦАХ С НЕКОММУТАТИВНЫМ СЛОЖЕНИЕМ

Данная работа посвящена изучению строения циклических полуколец с некоммутативным сложением. Строение бесконечных циклических полуколец с коммутативным сложением было изучено Е. М. Вечтомовым [1]. Каждое бесконечное циклическое полукольцо изоморфно одному из следующих трех идемпотентных числовых полуколец: полукольцу $\{2^n : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$ со сложением max и обычным умножением $\cdot$, полукольцу $\{1/2^n : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$ со сложением max и обычным умножением $\cdot$, полуполю $\{2^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ со сложением max и обычным умножением $\cdot$. Изучение конечных циклических полуколец с коммутативным сложением ведется А. С. Бестужевым. Мы отказываемся от требования коммутативности сложения в циклическом полукольце. В бесконечном случае такие полукольца имеют идемпотентное сложение ($x + x = x \quad \forall x$), а в конечном случае сложение может быть как идемпотентным, так и неидемпотентным.

Определение 1. *Полукольцом* будем называть алгебраическую структуру S с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такими, что $\langle S, +\rangle$ и $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппы и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Если в полукольце существует элемент 0, нейтральный по сложению и обладающий свойством мультипликативности ($x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in S$), то такое полукольцо будем называть *полукольцом с нулем* 0. Если в полукольце существует элемент 1, нейтральный по умножению, то такое полукольцо будем называть *полукольцом с единицей* 1.

Определение 2. Полукольцо S с 0 назовем *циклическим*, если существует элемент $a \in S \setminus \{0\}$, называемый *образующим*, натуральные степени которого исчерпывают все элементы в S, возможно, и 0 (возможно и 1 в случае полукольца с 1).

Из циклического полукольца S без 1 можно получить циклическое полукольцо S' с 1, добавив к полукольцу S нейтральный по умножению элемент 1: $S' = S \cup \{1\}$. Сумму 1 и элемента a^k полукольца S определим следующим образом: $1 + a^k = a^l$, если $a + a^{k+1} = a^{l+1}$. Аналогично, $a^k + 1 = a^l$, если $a^{k+1} + a = a^{l+1}$. Ассоциативность сложения и дистрибутивность умножения относительно сложения при этом выполняются. Если S — циклическое полукольцо с 0, то и S' — циклическое полукольцо с 0.

Теорема 1. *Бесконечные циклические полукольца с некоммутативным сложением имеют левое* $(x + y = x \quad \forall x \neq 0 \quad \forall y)$ *или правое* $(x + y = y \quad \forall x \quad \forall y \neq 0)$ *сложение.*

С помощью пакета для математических вычислений Maple были найдены конечные циклические полукольца малого порядка ($|S| \leqslant 10$.) Оказалось, что существуют конечные циклические полукольца как с идемпотентным, так и с неидемпотентным сложением.

Далее будем рассматривать конечные циклические полукольца S с образующим элементом a и идемпотентным некоммутативным сложением. Перечислим основные результаты.

В конечных циклических полукольцах возможны четыре взаимоисключающих случая:

(1) $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : a^n = 0$ (a — нильпотентный элемент),

(2) $\exists n \in \mathbb{N} : a^n = 1$ (a — обратимый элемент),

(3) $\exists k \in \mathbb{N} : a^k = a^{k+1} \neq 0$ (a — *поглощающий* элемент),

(4) $\exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : a^k = a^{k+n}, \forall n' < n \;\; a^k \neq a^{k+n'}$.

Как показывает следующее утверждение, сложение в случае (1) коммутативно.

Теорема 2. *Сложение в конечных циклических полукольцах, в которых образующий элемент нильпотентен, является идемпотентным, коммутативным и выполняется $a + b = a$ или $a + b = b$ для любых a и b.*

В случае (2) $T = S \setminus \{0\}$ является конечным полутелом, строение которого было изучено Вейнертом [2]. Вейнерт показал, что описание конечных полутел сводится к описанию конечных групп. Точнее, любое полутело $T \cong (T + 1) \times (1 + T)$, где $T + 1$ — подполутело в T с левым сложением, $1 + T$ — подполутело в T с правым сложением [3].

Теорема 3. *Конечные циклические полукольца с некоммутативным сложением и поглощающим образующим элементом имеют левое или правое сложение.*

Рассмотрим случай (4). При этом множество $\{1, a, a^2, \ldots$ $\ldots, a^{k-1}\}$ называется “хвостом”, а множество $C = \{a^k, a^{k+1}, \ldots$ $\ldots, a^{k+n-1}\}$ — “циклом” полукольца.

Предложение 1. *Цикл конечного циклического полукольца является циклическим полутелом. Единицей этого полутела служит элемент $e = a^{nl}$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$.*

Для изучения строения конечных циклических полуколец в случае (4) необходимо выяснить строение конечных циклических полутел. По предложению 1, C – циклическое полутело. Обозначим его образующий элемент через b.

Пусть $C \cong (C+e) \times (e+C)$, $C+e$ содержит m элементов и $e+C$ содержит h элементов.

Предложение 2. *Циклическое полутело* $C \cong (C+e) \times (e+ C)$, *где* $C+e = (b^h)$, $e+C = (b^m)$.

На полутеле C рассмотрим следующие бинарные отношения: $a^r \rho_1 a^s$, если $r \equiv s (mod\, h)$; $a^r \rho_2 a^s$, если $r \equiv s (mod\, m)$.

Предложение 3. *Отношения* ρ_1 *и* ρ_2 *являются конгруэнциями на полутеле* C.

Выделим два типа полуколец (4): с хвостом короче цикла и с хвостом не короче цикла.

Теорема 4. *Конечные циклические полукольца с некоммутативным сложением и хвостом короче цикла имеют либо левое сложение, либо правое сложение, либо сложение на полукольце* S *определяется следующим образом:* $a^s + a^t = a^{s_1} + a^{t_1}$ $(s \neq t)$, *где* $s_1 \equiv s (mod\, n)$, $t_1 \equiv t (mod\, n)$ *и* $a^{t_1}, a^{s_1} \in C$

Остается описать строение циклических полуколец (4), в которых хвост не короче цикла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вечтомов Е. М. *Введение в полукольца.* – Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 2000. – 44 с.

2. Weinert H. J. *Zur Theorie der HalbFastkorper* // Stud. Sci. Math. Hung. - 1981. - V. 16. - P. 201-218.

3. Boykett T. *Seminearring models of reversible computation* // Institutsbericht, Johannes Kepler Univ., Linz, Austria. – 1997. – Nr. 553.